1. Aufgabenblatt

Hinweis: Für viele Aufgaben (z.B. alle dieser Serie) ist es hilfreich, sich zunächst an (sehr) kleinen Beispielen klarzumachen, dass die Behauptung stimmt, bzw. was damit gemeint sein könnte. Aber auch wenn man die Aufgabe nicht (vollständig) lösen kann, könnte das Präsentieren solcher Beispiele auch schon Punkte geben.

Aufgabe 1.1 Man prüfe (d.h. beweise oder gebe ein Gegenbeispiel), welche der beiden Eigenschaften $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup Z$ oder $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ für alle Mengen X, Y, Z wahr ist.

Aufgabe 1.2
Sei $f : A \to B$ eine Abbildung, und seien $A_i \subseteq A$ und $B_i \subseteq B$ Teilmengen für $i = 1, 2$. Man prüfe (d.h. beweise oder gebe ein Gegenbeispiel), welche der folgenden Identitäten immer gelten:

(i) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$,

(ii) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,

(iii) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,

(iv) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(*Hinweis:* Für Teilmengen $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ definiert man $f(A') := \{f(a) | \, a \in A'\} \subseteq B$ und $f^{-1}(B') := \{a \in A | \, f(a) \in B'\} \subseteq A$.)

Aufgabe 1.3 Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Man beweise:

a) Falls $g : X \to A$ eine Abbildung ist, so dass $(f \circ g) : X \to B$ surjektiv ist, dann ist auch f surjektiv.

b) Falls f surjektiv ist, dann gibt es eine Abbildung $g : B \to A$ mit $f \circ g = Id_B$.

c) Man formuliere ähnlich zu (a) und (b) entsprechende Aussagen (a') und (b') für den Begriff "injektiv" (statt "surjektiv") und beweise sie. (*Vorsicht:* Bei (b') muß ein zusätzliche Voraussetzung gemacht werden, damit es wirklich stimmt...)

Aufgabe 1.4 a) Sei $s := \frac{\sqrt{5}+1}{2} \in \mathbb{R}$. Geben Sie eine quadratisches Polynom $f(x) = x^2 + bx + c$ $(b, c \in \mathbb{Q})$ an, so dass $f(s) = 0$ gilt. Ist f eindeutig bestimmt?

b) Wir definieren die Fibonacci-Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mittels $F_0 := 0$, $F_1 := 1$ und der Rekursionsformel $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 2)$.
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $s^{n-2} \leq F_n \leq s^{n-1}$ für $n \geq 2$ gilt.

Zusatzaufgabe (d.h. zusätzliche Punkte)
a) Man zeige, dass es zu jeder natürlichen Zahl n eine Menge M_n von n nicht auf einer gemeinsamen Gerade liegenden Punkten in der Ebene gibt, die alle einen ganzzahligen Abstand voneinander haben.

b) Sei M eine unendliche Menge von Punkten in der Ebene, die alle einen ganzzahligen Abstand voneinander haben. Man zeige, dass alle Punkte aus M auf einer Geraden liegen.